مربع‌های لاتین

قسمت دوم

محمود نصیری
مؤلف کتاب‌های درسی

اشاره

مبحـث مربع‌های لاتین یکی از بخش‌های جدید در ریاضیات گسســته پایه دوازدهم رشــته ریاضی فیزیک اســت. در این مقاله که از دو قسمت تشکیل شده است، در قسمت قبل سعی کردیم مفهوم‌های اساسی در مورد مربع‌های لاتین و کاربردهایی از آن را بیان کنیم. سپس مربع‌های لاتین متعامد و روش‌های ساختن آن‌ها را همراه با کاربرد آن بررسی کردیم، سعی شده بود علاوه بر روش کتاب درسی روش‌های دیگری نیز بیان شوند. همچنین به مســئله‌های کتاب نیز اشاره‌ای شد. در قســمت دوم، کاربردی از مربع‌های لاتین را در مورد ساختن مربع‌های جادویی بیان می‌کنیم.

کلیدواژه‌ها: مربع‌های لاتین، اویلر، جدول کیلی، مربع‌های لاتین متعامد

تمرین:

۱. خانه‌های خالی شکل ۱ را چنان پر کنید که این مربع به یک مربع لاتین تبدیل شود.

شکل ۱

۱	۲	۳	۴	۵
۵	۱	۲	۳	۴
۴	۵	۱	۲	۳

۲. در صورت امکان مربع‌های شکل‌های ۲ تا ۵ را به یک مربع لاتین تبدیل کنید.

شکل ۲

۱			
			۲
		۳	

شکل ۳

۲	۱			
			۳	۴
				۳
۱				

شکل ۴

۱				
	۱			
		۱		
			۱	
				۲

شکل ۵

			۴
	۳	۴	
۳			

مربع‌های جادویی و مربع‌های لاتین متعامد[1]

تعریف: یــک مربع جادویی از مرتبــهٔ $n>1$، یک مربع (ماتریس) $A=(a_{ij})_{n\times n}$ از n^2 عدد متمایز از مجموعهٔ S هستند. و چنان مرتب شده‌اند که مجموع عددهای هر سطر، هر ستون و هر دو قطر برابر باشند.

در شــکل ۶ یک مربع جادویی از مرتبهٔ ۴ دیده می‌شــود که شــامل ۱۶ عدد متمایز۱۶, ۰۰۰, ۳, ۲, ۱ اســت. مجموع عددهای هر سطر، هر ستون و هر یک از دو قطر برابر ۳۴ است.

شکل ۶

۷	۱۲	۱	۱۴
۲	۱۳	۸	۱۱
۱۶	۳	۱۰	۵
۹	۶	۱۵	۴

هر گاه یک مربع جادویی شامل عددهای از ۱ تا n^2 باشد، آن را مربع جادویی نرمال از مرتبهٔ n می‌نامیم ($n>1$).

با توجــه به این تعریف در مربع جادویی نرمال می‌توانیم S، مجموع عددهای هر سطر یا هر ستون یا قطرها را محاسبه کنیم. کافی اســت مجموع عددهای از ۱ تا n^2 را بر n تقسیم

کنیم؛ چرا؟

$$ذ = \frac{۱+۲+\cdots+ک^{۲}}{ک} = \frac{ک^{۲}(ک^{۲}+۱)}{۲ک} = \frac{ک(ک^{۲}+۱)}{۲}$$

از فرمول مجموع دنبالهٔ حسابی استفاده کرده‌ایم.

هر گاه در یک مربع جادویی مجموع عددهای هر سطر و هر ستون برابر باشند، آن را مربع نیمه جادویی یا شبه جادویی می‌نامند.

در ادامه خواهیم دید که چگونه به کمک مربع‌های دوبه‌دو متعامد می‌توان مربع‌های جادویی ساخت.

ساختن مربع‌های جادویی

ساختن مربع‌های جادویی به ویژه نیمه‌جادویی به کمک مربع‌های لاتین متعامد امکان‌پذیر است.

اولین روش آن توسط **اویلر** بیان شده است.

فرض کنیم A و B دو مربع لاتین از مرتبهٔ سه به صورت شکل ۷ باشند.

A=

a	b	c
b	c	a
c	a	b

B=

γ	β	α
α	γ	β
β	α	γ

شکل ۷

اگر $a=۰$ ، $b=۳$ و $c=۶$ ، همچنین $\alpha=۳$، $\beta=۲$ و $\gamma=۱$ را اختیار کنیم، به دو مربع لاتین زیر می‌رسیم (شکل ۸).

$A_۱$=

۰	۳	۶
۳	۶	۰
۶	۰	۳

$B_۱$=

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

شکل ۸

اکنون $A_۱+B_۱$ یعنی جمع معمولی درایه‌های متناظر را می‌نویسیم. حاصل این یک مربع نیمه جادویی نرمال است (شکل ۹).

$M=A_۱+B_۱$ =

۱	۵	۹
۶	۷	۲
۸	۳	۴

$I_۳$ =

۱	۱	۱
۱	۱	۱
۱	۱	۱

شکل ۹

اگر دو مربع لاتین $L_۱$ و $L_۲$ را مطابق شکل ۱۰ در نظر بگیرید و $M_۱ = ۳L_۱ + L_۲ + I_۳$ را محاسبه کنید، به همان مربع نیمه جادویی نرمال M می‌رسیم. اگر $L_۱ + ۳L_۱ + I_۳$ را تشکیل دهید، چه تفاوتی با M و $M_۱$ دارد؟ اکنون حالت $n=۴$ را بررسی می‌کنیم.

تذکر: منظور از ضرب یک عدد در یک مربع لاتین یا جمع دو یا چند مربع لاتین هم‌مرتبه، مشابه همان است که در ماتریس‌ها تعریف می‌کنیم.

$L_۱$ =

۰	۱	۲
۱	۲	۰
۲	۰	۱

$L_۲$ =

۰	۱	۲
۲	۰	۱
۱	۲	۰

$M_۱$ =

۱	۵	۹
۶	۷	۲
۸	۳	۴

شکل ۱۰

دو مربع لاتین متعامد $L_۱$ و $L_۲$ را در شکل ۱۱ در نظر می‌گیریم.

مشابه مثال قبلی، $M = ۴L_۱ + L_۲ + I_۴$ را تشکیل می‌دهیم.

$L_۱$=

۰	۱	۲	۳
۱	۰	۳	۲
۲	۳	۰	۱
۳	۲	۱	۰

$L_۲$=

۰	۱	۲	۳
۲	۳	۰	۱
۳	۲	۱	۰
۱	۰	۳	۲

$I_۴$=

۱	۱	۱	۱
۱	۱	۱	۱
۱	۱	۱	۱
۱	۱	۱	۱

M=

۱	۶	۱۱	۱۶
۷	۴	۱۳	۱۰
۱۲	۱۵	۲	۵
۱۴	۹	۸	۳

شکل ۱۱

M یک مربع نیمه جادویی نرمال است.

اگر $M_۱ = L_۱ + ۴L_۲ + I_۴$ را تشکیل دهید، چه ارتباطی با M مشاهده می‌کنید؟

در تمام این مثال‌ها، $I_۳$ یا $I_۴$ و یا کلاً I_n نقش اضافه کردن یک واحد به هر درایه را دارند. یعنی اگر $۳L_۱ + L_۲$ یا $۴L_۱ + L_۲$ را تشکیل دهیم و به هر درایه یک واحد اضافه کنیم، به همان نتیجه می‌رسیم. به همین روش می‌توانیم مربع‌های نیمه جادویی نرمال از مرتبهٔ n بسازیم؛ یعنی قضیهٔ زیر را داریم:

قضیه: فرض کنیم $L_۱$ و $L_۲$ دو مربع لاتین متعامد و متمایز از مرتبهٔ n باشد که روی مجموعهٔ $ذ = \{۰،۱،۲،\ldots،ک-۱\}$ تعریف می‌شوند و I_n یک ماتریس $n\times n$ باشد که همه درایه‌های آن یک باشند. در این‌صورت $چ = کچ_{۱} + چ_{۲} + ذ_{ک}$ یک مربع نیمهٔ جادویی نرمال است ($n\geq۲$).

روش دیگری در ساختن مربع‌های نیمه‌جادویی نرمال

می‌توانیم روش دیگری را نیز برای ساختن مربع‌های نیمه جادویی نرمال بیان کنیم. آن را برای حالت n=۴ در ادامه مشاهده می‌کنید. دو مربع لاتین A و B به صورت مربع‌های شکل ۱۲ هستند.

این دو مربع لاتین متعامدند. زیرا در مربع AB (شکل ۱۳) هیچ دو درایه یکسان نیستند. در واقع AB به فرم یک مربع «گریگو» لاتین است.

A=

۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	۳
۳	۴	۱	۲
۴	۳	۲	۱

B=

۱	۲	۳	۴
۳	۴	۱	۲
۴	۳	۲	۱
۲	۱	۴	۳

شکل ۱۲

شکل ۱۳

AB=

۱۱	۲۲	۳۳	۴۴
۲۳	۱۴	۴۱	۳۲
۳۴	۴۳	۱۲	۲۱
۴۲	۳۱	۲۴	۱۳

هر گاه یک مربع جادویی شامل عددهای از ۱ تا n^2 باشد، آن را مربع جادویی نرمال از مرتبهٔ n می‌نامیم (n>1)

در ساختار جدول شکل۱۳ مجموع عددهای هر سطر و مجموع عددهای هر ستون برابر و برابر ۱۱۰ است. این یک مربع نیمه جادویی است، زیرا درایه‌ها ۱۶ عدد اولیه نیستند. اما چنانچه مشاهده می‌کنیم، به سادگی شرایط تبدیل به یک مربع جادویی را دارد. اگر ارقام را به پیمانهٔ ۴ محاسبه کنیم، به مربع شبه جادویی شکل ۱۴ می‌رسیم که همهٔ رقم‌های آن ۰، ۱، ۲ یا ۳ هستند.

شکل ۱۴

۱۱	۲۲	۳۳	۰۰
۲۳	۱۰	۰۱	۳۲
۳۰	۰۳	۱۲	۲۱
۰۲	۳۱	۲۰	۱۳

حال اگر این اعداد را در مبنای ۴ در نظر گرفته و معادل آن‌ها را در مبنای ۱۰ بنویسیم به مربع شکل ۱۵ می‌رسیم؛

مثلاً:

$$(۳۳)_۴ = ۳\times ۴ + ۳ = (۱۵)_{۱۰}$$

$$(۳۲)_۴ = ۳\times ۴ + ۲ = (۱۴)_{۱۰}$$

شکل ۱۵

۵	۱۰	۱۵	۰
۱۱	۴	۱	۱۴
۱۲	۳	۶	۹
۲	۱۳	۸	۷

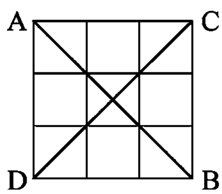
در شکل ۱۵مربعی داریم که به یک مربع جادویی نزدیک است، اما عددهای از ۰ تا ۱۵ در آن به کار رفته‌اند. کافی است به هر کدام از عددها یک واحد اضافه کنیم تا به یک مربع نیمه جادویی نرمال از مرتبهٔ ۴ برسیم (شکل ۱۶).

شکل ۱۶

۶	۱۱	۱۶	۱
۱۲	۵	۲	۱۵
۱۳	۴	۷	۱۰
۳	۱۴	۹	۸

ساختن مربع‌های جادویی نرمال

اکنون مسئلهٔ مهم‌تر آن است که: آیا می‌توانیم به همین روش مربع‌های جادویی نرمال بسازیم؟ یا به عبارت دیگر، مربع‌های لاتین متعامد انتخاب شده دارای چه ویژگی باشند تا به جای مربع‌های نیمه جادویی نرمال، خود به مربع‌های جادویی نرمال تبدیل شوند. ابتدا برای حالت‌های n=۳ و n=۴، آن را بررسی می‌کنیم.



شکل ۱۷

قبل از بررسی به یک قرارداد نیاز داریم: در یک مربع (شکل ۱۷) که خود شامل مربع‌های کوچک‌تر است، مربع‌هایی را که یک قطر آن‌ها روی قطر AB از مربع اصلی است، مربع‌های روی قطر اصلی می‌نامیم و مربع‌هایی را که یک قطر آن‌ها روی قطر CD از مربع اصلی است، مربع‌های روی قطر فرعی می‌نامیم.

دو مربع لاتین دوبه دو متعامد L_1 و L_2 از مرتبهٔ ۳ را روی مجموعهٔ {۲و۱و۰} در نظر می‌گیریم (شکل ۱۸).

هر گاه در یک مربع جادویی مجموع عددهای هر سطر و هر ستون برابر باشند، آن را مربع نیمه جادویی یا شبه جادویی می‌نامند
تذکر: منظور از ضرب یک عدد در یک مربع لاتین یا جمع دو یا چند مربع لاتین هم‌مرتبه، مشابه همان است که در ماتریس‌ها تعریف می‌کنیم

شکل ۱۸

$L_۱=$

۰	۲	۱
۲	۱	۰
۱	۰	۲

$L_۲=$

۱	۰	۲
۲	۱	۰
۰	۲	۱

ایـــن دو مربع لاتین به غیـــر از متعامد بودن چه ویژگی دیگری دارند؟ در $L_۱$ درایه‌ها یا عددهای مربع‌های روی قطر فرعی و در $L_۲$ درایه‌ها یا عددهای مربع‌های روی قطر فرعی دارای چه ویژگی هستند؟

اکنـــون مانند مثال‌هـــای قبلی، $\text{چ} = ۳\text{چ}_۱ + \text{چ}_۲ + \text{ذ}_۳$ را تشکیل می‌دهیم. مشاهده می‌کنیم که M یک مربع جادویی نرمال ۳×۳ اســـت (شـــکل ۱۹). تمام عددهای ۱، ۲، ... و ۹ در آن به کار رفته‌اند و مجموع عددهای روی هر ســـطر، هر ستون و هر دو قطر برابر ۱۵ است.

شکل ۱۹

$M=$

۲	۷	۶
۹	۵	۱
۴	۳	۸

در اینجا عدد $\frac{\text{ک}-۱}{۲}=\frac{۳-۱}{۲}=۱$ در تشکیل مربع جادویی نرمال نقـــش اساســـی دارد. اکنون حالت n=۴ را بررســـی می‌کنیـــم. در شـــکل ۲۰، $L_۱$ و $L_۲$ دو مربع لاتین دوبه‌دو متعامد روی مجموعهٔ {۰,۱,۲,۳} هستند.

شکل ۲۰

$L_۱=$

۰	۱	۲	۳
۳	۲	۱	۰
۱	۰	۳	۲
۲	۳	۰	۱

$L_۲=$

۰	۱	۲	۳
۲	۳	۰	۱
۳	۲	۱	۰
۱	۰	۳	۲

مانند مثال‌های قبلی، $\text{چ} = ۴\text{چ}_۱ + \text{چ}_۲ + \text{ذ}_۴$ را تشـــکیل می‌دهیم، مشاهده می‌کنیم که M یک مربع جادویی نرمال ۴×۴ است (شـــکل ۲۱). مجموع عددهای روی هر سطر، هر ستون و هر دو قطر مربع اصلی ۳۴ است و عددهای ۱، ۲، ۳، .... و ۱۶ در آن به کار رفته‌اند.

شکل ۲۱

$M=$

۱	۶	۱۱	۱۶
۱۵	۱۲	۵	۲
۸	۳	۱۴	۹
۱۰	۱۳	۴	۷

به مربع‌های لاتین دوبه‌دو متعامد $L_۱$ و $L_۲$ در شـــکل ۹۴ توجـــه کنید. آیا ویژگی را که در حالت n=۳ داشـــتیم، اینجا وجود دارد؟ مشـــاهده می‌کنیم که در حالت n=۴ ویژگی را که در حالت n=۳ وجود داشـــت، نداریم. اما اگر به قطرهای اصلی و فرعی توجه کنید. مشاهده می‌کنید که تمام عددها روی این قطرها عددهای مجموعهٔ {۰,۱,۲,۳} هســـتند. با ادامهٔ این روند مشاهده خواهیم کرد که وقتی n>۲ فرد باشد، مســـاوی بودن عددهای روی قطرهای اصلی از یکی و فرعی از دیگری برابر عدد ثابت $\frac{\text{ک}-۱}{۲}$ است. واضح است که در هر دوی $L_۱$ و $L_۲$ عددهای روی هر دو قطر نمی‌توانند مســـاوی باشند؛ چرا؟

و در حالـــت دیگر، وقتـــی مربع لاتیـــن روی مجموعهٔ S={۰,۱,....,n-۱} تعریف می‌شـــود، عددهای روی هر دوی قطرهای اصلـــی و فرعی مربع همه عضوهایـــی از نمادها یا همان عددهای S هستند.

بـــا توجه به مثال‌های فوق و قضیهٔ قبلی می‌توانیم قضیهٔ زیر را در مورد ساختن مربع‌های جادویی نرمال ثابت کنیم:

قضیه: فرض کنیـــم $L_۱$ و $L_۲$ دو مربع لاتین دو به دو متعامد باشند که روی S={۰,۱,....,n-۱} تعریف می‌شوند و I_n ماتریســـی n×n باشد که همهٔ درایه‌های آن یک هستند. در این‌صورت $\text{چ} = \text{ک}\text{چ}_۱ + \text{چ}_۲ + \text{ذ}_\text{ک}$ یک مربع جادویی نرمال است، اگر:

۱. n عددی فرد باشد و دو قطر اصلی و فرعی یکی از $L_۱$ و دیگری از $L_۲$ ثابت و برابر عدد $\frac{\text{ک}-۱}{۲}$ باشند. یا:

۲. در هـــر دوی $L_۱$ و $L_۲$ عددهای روی قطرهای اصلی و فرعی شامل تمام عددهای S باشند.

پی‌نوشت

1. Magic square and Latin square orthogonal